非可換フレーバー対称性による θ_{13} の予言

石森　一

Niigata University

2 月 9 日@宇宙線研

共同研究者　新潟大学：谷本盛光、清水勇介、嵯峨浩太
京都大学：小林達夫、 大木洋
KIAS：大村雄司　BUE：岡田寛

Plan of my talk

1. Introduction
2. Flavor symmetry
   - A_4 symmetry
   - S_4 symmetry
   - $\Delta(54)$ symmetry
3. Prediction of θ_{13}
   - A_4 model
   - S_4 model
   - $\Delta(54)$ model
4. Summary

Motivation

ニュートリノ振動より Tri-bimaximal の混合が示唆されている。

離散対称性によりレプトンの混合が説明できる。

- 様々なモデルが tri-bimaximal 混合を導く
- 例えば、S_3, D_4, A_4, S_4, $\Delta(54)$, $\cdots$

多くの模型で tri-bimaximal 混合を leading で予言する。
しかし、高次補正を加えると tri-bimaximal 混合からずれる。

目的

フレーバー離散対称性ごとに異なった θ_{13} の予言を解析する。

ニュートリノ振動実験による結果

M.C. G-Garcia, M. Maltoni, J. Salvado, arXiv:1001.4524

parameter	best fit	1σ	3σ	tri-bi
θ_{12}	$34.4°$	$33.4° - 35.4°$	$31.5° - 37.6°$	$35.3°$
θ_{23}	$42.3°$	$39.5° - 47.6°$	$35.2° - 53.7°$	$45°$
θ_{13}	$6.8°$	$3.2° - 9.4°$	$< 13.2°$	$0°$
$\Delta m^2_{\mathrm{sol}}\ [10^{-5}\mathrm{eV}^2]$	7.59	7.39-7.79	6.90-8.20	*
$\Delta m^2_{\mathrm{atm}}\ [10^{-3}\mathrm{eV}^2]_N$	2.51	2.39-2.63	2.15-2.90	*

$$|\nu_\alpha\rangle = U_{\alpha i}\,|\nu_i\rangle\,, \qquad \alpha = e, \mu, \tau, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$U_{\mathrm{MNS}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

ニュートリノ振動実験による結果

M.C. G-Garcia, M. Maltoni, J. Salvado, arXiv:1001.4524

parameter	best fit	1σ	3σ	tri-bi
θ_{12}	34.4°	$33.4^\circ - 35.4^\circ$	$31.5^\circ - 37.6^\circ$	35.3°
θ_{23}	42.3°	$39.5^\circ - 47.6^\circ$	$35.2^\circ - 53.7^\circ$	45°
θ_{13}	6.8°	$3.2^\circ - 9.4^\circ$	$< 13.2^\circ$	0°
$\Delta m^2_{\rm sol}$ $[10^{-5}{\rm eV}^2]$	7.59	7.39-7.79	6.90-8.20	*
$\Delta m^2_{\rm atm}$ $[10^{-3}{\rm eV}^2]_N$	2.51	2.39-2.63	2.15-2.90	*

$\sin^2\theta_{12} = 1/3$, $\sin^2\theta_{23} = 1/2$, $\sin^2\theta_{13} = 0$,

$$U_{\rm tri-bimaximal} = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & \sqrt{1/3} & 0 \\ -\sqrt{1/6} & \sqrt{1/3} & -\sqrt{1/2} \\ -\sqrt{1/6} & \sqrt{1/3} & \sqrt{1/2} \end{pmatrix}$$

Tri-bimaximal matrix

Tri-bimaximal matrix が示唆するフレーバー構造は何か？

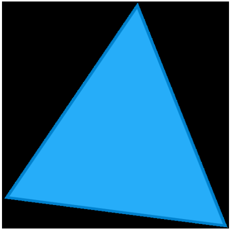
$$
\begin{aligned}
M_\nu &= U_{\rm tri}^* \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} U_{\rm tri}^\dagger \\
&= \frac{m_1+m_3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{m_2-m_1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{m_1-m_3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

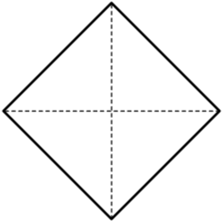
質量行列の起源の１つの可能性としてフレーバーの離散対称性がある。

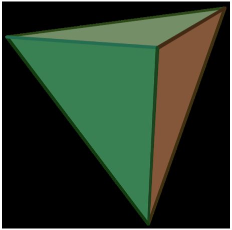
離散対称性の種類：

- S_3, D_4, A_4, S_4, $\Delta(54)$ など

離散群に基づく離散対称性を用いることで
実験を再現する質量行列を導くことができる。

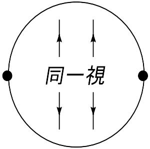


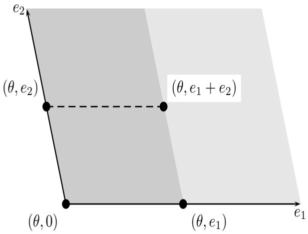




高次元をオービフォールド化したとき離散対称性が現れる。

(A. Adulpravitchai, A. Blum, M. Lindner, JHEP 0907: 053, 2009)





オービフォルド	格子の成す角	フレーバー対称性
$\mathbf{S}^1/\mathbf{Z}_2$		S_2
$\mathbf{T}^2/\mathbf{Z}_2$	60°	S_4
		A_4(proper Lorenz tr.)
	90°	D_4
	上記以外	$Z_2 \times Z_2$

S_3 対称性

S_3 対称性は 3 要素すべての置換を示す。

世代間に S_3 対称性を課した場合、

$$M_\nu = \frac{m_1 + m_3}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{m_2 - m_1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} + \frac{m_3 - m_1}{3}\cancel{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}}.$$

このとき、m_1 と m_3 の質量が縮退し実験と合わない。

A_4, S_4, $\Delta(54)$ の場合は tri-bimaximal 混合を任意の質量で導ける。

（高次元で S_3 を破ることで 3 つ目の行列を導く方法もある。
N. Haba, A. Watanabe, K. Yoshioka, Phys. Rev. Lett. 97 (2006) 041601）

A_4 対称性

A_4 は triplet を持つ群の中で要素が最小。

G. Altarelli, F. Feruglio, Nucl.Phys. B720 (2005) 64
A. Hayakawa et al., Phys. Lett. B680 (2009) 334

Basic structure of A_4

A_4 の既約表現は４つ: $\mathbf{3}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}'$, $\mathbf{1}''$.

Lagrangian が A_4 対称性を持つ場合、
すべての項は A_4 の自明な１重項 $\mathbf{1}$ である。

- いくつか掛け算則の例を上げると
  $\mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{1} + \mathbf{1}' + \mathbf{1}'' + \mathbf{3} + \mathbf{3}$ and $\mathbf{1}' \times \mathbf{1}'' = \mathbf{1}$.

自明な１重項になる組み合わせは

$\mathbf{3} \times \mathbf{3}$, $\mathbf{1} \times \mathbf{1}$, $\mathbf{1}' \times \mathbf{1}''$.

３重項は世代数に対応できる。

Altarelli と Feruglio が提案した $A_4 \times Z_3$ SUSY 模型.

	レプトン		右巻き ニュートリノ			ヒッグス	gauge singlet スカラー			FN場
	L	R_e^c	R_μ^c	R_τ^c	N^c	$H_{u,d}$	χ_ℓ	χ_N	χ	Φ
A_4	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1''}$	$\mathbf{1'}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
Z_3	ω	ω^2	ω^2	ω^2	ω^2	1	1	ω	ω	1
$U(1)_F$	0	2	1	0	0	0	0	0	0	-1

χ_ℓ, χ_N, χ はゲージ 1 重項の新しい粒子、
Φ は Frogatta-Nielsen 場である。 $\omega = e^{2\pi i/3}$

- $A_4 \times Z_3$ 対称性により特定の coupling だけが許される。

Charged lepton

- $R_e^c(L\chi_\ell)_1 H_d \Phi^2/\Lambda^3$,

	R_e^c	L	χ_ℓ	H_d
A_4	$\mathbf{1}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}$
Z_3	ω^2	ω	1	1

- $R_\mu^c(L\chi_\ell)_{1'} H_d \Phi/\Lambda^2$,

	R_μ^c	L	χ_ℓ	H_d
A_4	$\mathbf{1}''$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}$
Z_3	ω^2	ω	1	1

- $R_\tau^c(L\chi_\ell)_{1''} H_d/\Lambda$

	R_τ^c	L	χ_ℓ	H_d
A_4	$\mathbf{1}'$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}$
Z_3	ω^2	ω	1	1

A_4 の tensor product により coupling が決定する。
(Λ: cut off scale)

VEV を $\langle\chi_\ell\rangle = (\alpha_{\ell_1}, \alpha_{\ell_2}, \alpha_{\ell_3})\Lambda$
$\langle\Phi\rangle = \lambda\Lambda$ とすると

$$M_\ell = y_e\lambda^2 v_d \begin{pmatrix} \alpha_{\ell_1} & \alpha_{\ell_2} & \alpha_{\ell_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + y_\mu \lambda v_d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{\ell_3} & \alpha_{\ell_1} & \alpha_{\ell_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + y_\tau v_d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{\ell_2} & \alpha_{\ell_3} & \alpha_{\ell_1} \end{pmatrix}$$

Dirac neutrino

- $\bar{N} L H_u$,

	N^c	L	H_u
A_4	**3**	**3**	**1**
Z_3	ω^2	ω	1

Majorana neutrino

- $\bar{N}^c N \chi_N$,

	N	χ_N
A_4	**3**	**3**
Z_3	ω	ω

- $\bar{N}^c N \chi$,

	N	χ
A_4	**3**	**1**
Z_3	ω	ω

VEV を $\langle \chi_N \rangle = (\alpha_{N_1}, \alpha_{N_2}, \alpha_{N_3})\Lambda$
$\langle \chi \rangle = \alpha \Lambda$ とすると

$$M_D = y_D v_u \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_N = \frac{y_1^N \Lambda}{3} \begin{pmatrix} 2\alpha_{N_1} & -\alpha_{N_3} & -\alpha_{N_2} \\ -\alpha_{N_3} & 2\alpha_{N_2} & -\alpha_{N_1} \\ -\alpha_{N_2} & -\alpha_{N_1} & 2\alpha_{N_3} \end{pmatrix} + y_2^N \alpha \Lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

以下のように VEV の alignment を与える。

$\langle\chi_\ell\rangle = (\alpha_\ell, 0, 0)\Lambda$ and $\langle\chi_\nu\rangle = \alpha_N(1,1,1)\Lambda$,

$$M_l = \alpha_\ell v_d \begin{pmatrix} \lambda^2 y_e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda y_\mu & 0 \\ 0 & 0 & y_\tau \end{pmatrix}$$

$$M_\nu = \frac{m_1+m_3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{m_2-m_1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{m_1-m_3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

この行列は tri-bimaximal mixing を導く。

$$m_1 = \frac{y_D^2 v_u^2}{2(y_1^N \alpha_N + y_2^N \alpha)\Lambda}, \quad m_2 = \frac{y_D^2 v_u^2}{2 y_2^N \alpha \Lambda}, \quad m_3 = \frac{y_D^2 v_u^2}{2(y_1^N \alpha_N - y_2^N \alpha)\Lambda}.$$

S_4 対称性

S_4 は singlet, doublet, triplet を持つ最小の群。
レプトン、クォークを統一的に扱う。
Cabibbo angle を 15° 付近だと予言できる。

H. Ishimori, Y. Shimizu, M. Tanimoto, Prog. Theor. Phys. 121 (2009) 769

Basic structure of S_4

S_4 の既約表現は 5 つ: $\mathbf{3_1}$, $\mathbf{3_2}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{1_1}$, $\mathbf{1_2}$.

Lagrangian が S_4 対称性を持つ場合、
すべての項は S_4 の自明な 1 重項 $\mathbf{1_1}$ である。

- いくつか掛け算則の例を上げると

$$\mathbf{3_i} \times \mathbf{3_i} = \mathbf{1}_1 + \mathbf{2} + \mathbf{3}_1 + \mathbf{3}_2, \quad \mathbf{3_1} \times \mathbf{3_2} = \mathbf{1}_2 + \mathbf{2} + \mathbf{3}_1 + \mathbf{3}_2$$

$$\mathbf{3_i} \times \mathbf{2} = \mathbf{3_1} + \mathbf{3_2}, \ \mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{1_1} + \mathbf{1_2} + \mathbf{2}, \ \cdots.$$

自明な 1 重項になる組み合わせは

$\mathbf{3_1} \times \mathbf{3_1}$, $\mathbf{3_2} \times \mathbf{3_2}$, $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$, $\mathbf{1}_2 \times \mathbf{1}_2$, $\mathbf{1}_1 \times \mathbf{1}_1$.

S_4 model

我々が提案した $S_4 \times Z_4$ SUSY GUT 模型を紹介する。

	レプトン			右巻きニュートリノ	
	(L_e, L_μ, L_τ)	(R_e^c, R_μ^c)	R_τ^c	(N_e^c, N_μ^c)	N_τ^c
S_4	$\mathbf{3}_1$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{1}_1$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{1}_2$
Z_4	i	$-i$	-1	1	1
$U(1)_F$	0	1	0	1	0

	ヒッグス		スカラー場							FN 場
	$H_{5,\bar{5}}$	H_{45}	χ_u	χ_u'	χ_N	χ_D	χ_ℓ	χ_ℓ'	χ	Φ
S_4	$\mathbf{1}_1$	$\mathbf{1}_1$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}_2$	$\mathbf{3}_1$	$\mathbf{3}_1$	$\mathbf{1}_1$	$\mathbf{1}_1$
Z_4	1	-1	-1	$-i$	1	$-i$	-1	i	i	1
$U(1)_F$	0	0	0	-1	-2	0	0	0	-1	-1

- フレーバー対称性により特定の coupling だけが許される。

Charged lepton

- $\lambda^2(R_e^c, R_\mu^c)L\chi_\ell H_{45}/\Lambda,$

	(R_e^c, R_μ^c)	L	χ_ℓ	H_{45}
S_4	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}_1$	$\mathbf{3}_1$	$\mathbf{1}_1$
Z_4	$-i$	i	-1	-1

- $R_\tau^c L\chi_\ell' H_d/\Lambda,$

	R_τ^c	L	χ_ℓ'
S_4	$\mathbf{1}_1$	$\mathbf{3}_1$	$\mathbf{3}_1$
Z_4	-1	i	i

S_4 の tensor product により coupling が決定する。
VEV を $\langle\chi_\ell\rangle = (\alpha_{\ell_1}, \alpha_{\ell_2}, \alpha_{\ell_3})\Lambda$, $\langle\chi_{\ell'}\rangle = (\alpha_{\ell_1'}, \alpha_{\ell_2'}, \alpha_{\ell_3'})\Lambda$ とすると

$$M_\ell = -3y_1\lambda v_{45}\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{\ell_2}/\sqrt{2} & -\alpha_{\ell_3}/\sqrt{2} \\ -2\alpha_{\ell_1}/\sqrt{6} & \alpha_{\ell_2}/\sqrt{6} & \alpha_{\ell_3}/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + y_2 v_d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{\ell_1'} & \alpha_{\ell_2'} & \alpha_{\ell_3'} \end{pmatrix}$$

Dirac neutrino

- $(N_e^c, N_\mu^c) L \chi_D H_u/\Lambda$,

	(N_e^c, N_μ^c)	L	χ_D
S_4	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}_1$	$\mathbf{3}_2$
Z_4	1	i	$-i$

- $N_\tau^c L \chi_D H_u/\Lambda$,

	N_τ^c	L	χ_D
S_4	$\mathbf{1}_2$	$\mathbf{3}_1$	$\mathbf{3}_2$
Z_4	1	i	$-i$

Majorana neutrino

- $(N_e, N_\mu)^2 \Phi^2/\Lambda$, N_τ^2

	(N_e, N_μ)	N_τ
S_4	$\mathbf{2}$	$\mathbf{1}_2$
Z_4	1	1

- $(N_e, N_\mu)^2 \chi_N$

	(N_e, N_μ)	χ_N
S_4	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$
Z_4	1	1

VEV を $\langle \chi_D \rangle = (\alpha_{D_1}, \alpha_{D_2}, \alpha_{D_3})\Lambda$, $\langle \chi_N \rangle = (\alpha_{N_1}, \alpha_{N_2})\Lambda$ とすると

$$M_D = v_u \begin{pmatrix} 2y_1^D \lambda \alpha_{D_1}/\sqrt{6} & -y_1^D \lambda \alpha_{D_2}/\sqrt{6} & -y_1^D \lambda \alpha_{D_3}/\sqrt{6} \\ 0 & y_1^D \lambda \alpha_{D_2}/\sqrt{2} & -y_1^D \lambda \alpha_{D_3}/\sqrt{2} \\ y_2^D \alpha_{D_1} & y_2^D \alpha_{D_2} & y_2^D \alpha_{D_3} \end{pmatrix}$$

$$M_N = \begin{pmatrix} y_1^N \lambda^2 \bar{\Lambda} + y_2^N \alpha_{N_2} & y_2^N \alpha_{N_1} \Lambda & 0 \\ y_2^N \alpha_{N_1} \Lambda & y_1^N \lambda^2 \bar{\Lambda} - y_2^N \alpha_{N_2} & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix}$$

VEV の alignment を以下のように与える。

$$\langle\chi_\ell\rangle = (0, \alpha_\ell, 0)\Lambda, \quad \langle\chi'_\ell\rangle = (0, 0, \alpha_{\ell'})\Lambda,$$
$$\langle\chi_D\rangle = \alpha_D(1,1,1)\Lambda, \quad \langle\chi_N\rangle = (0, \alpha_N)\Lambda.$$

$$M_l^\dagger M_l = v_d^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6|\bar{y}_1|^2\lambda^2\alpha_\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & |y_2|^2\alpha_{\ell'}^2 \end{pmatrix}$$

$$M_\nu = \frac{b+c}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3a-b}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{b-c}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

この行列は tri-bimaximal mixing を導く。

$$a = \frac{(y_2^D\alpha_D v_u)^2}{M}, \quad b = \frac{(y_1^D\lambda\alpha_D v_u)^2}{y_1^N\lambda^2\bar{\Lambda} + y_2^N V_N}, \quad c = \frac{(y_1^D\lambda\alpha_D v_u)^2}{y_1^N\lambda^2\bar{\Lambda} - y_2^N V_N}.$$

$\Delta(54)$ 対称性

$\Delta(54)$ は stringy origin の中で
singlet, doublet, triplet を持つ最小の群。

T. Kobayashi, H. P. Nilles, F. Ploger, S. Raby, M. Ratz,
Nucl. Phys. B768: 135, 2007
H. Ishimori et al., JHEP 0904: 011, 2009

Basic structure of $\Delta(54)$

$\Delta(54)$ の既約表現は 10 こ: $\mathbf{3}_1^{(1)}$, $\mathbf{3}_1^{(2)}$, $\mathbf{3}_2^{(1)}$, $\mathbf{3}_2^{(2)}$, $\mathbf{2}_1$, $\mathbf{2}_2$, $\mathbf{2}_3$, $\mathbf{2}_4$, $\mathbf{1}_1$, $\mathbf{1}_2$.

Lagrangian が $\Delta(54)$ 対称性を持つ場合、
すべての項は $\Delta(54)$ の自明な 1 重項 1_1 である。

- いくつか掛け算則の例を上げると
  $\mathbf{3}_\mathbf{i}^{(1)} \times \mathbf{3}_\mathbf{i}^{(1)} = \mathbf{3}_1^{(2)} + \mathbf{3}_1^{(2)} + \mathbf{3}_2^{(2)}$, $\mathbf{3}_\mathbf{i}^{(1)} \times \mathbf{3}_\mathbf{i}^{(2)} = \mathbf{1}_1 + \mathbf{2}_1 + \mathbf{2}_2 + \mathbf{2}_3 + \mathbf{2}_4$
  $\mathbf{3}_\mathbf{i}^{(\mathbf{j})} \times \mathbf{2}_k = \mathbf{3}_\mathbf{1}{}^{(j)} + \mathbf{3}_\mathbf{2}{}^{(j)}$, $\mathbf{2}_i \times \mathbf{2}_i = \mathbf{1}_1 + \mathbf{1}_2 + \mathbf{2}_i, \cdots$.

自明な 1 重項になる組み合わせは

$\mathbf{3}_1^{(1)} \times \mathbf{3}_1^{(2)}$, $\mathbf{3}_2^{(1)} \times \mathbf{3}_2^{(2)}$, $\mathbf{2}_i \times \mathbf{2}_i$, $\mathbf{1}_2 \times \mathbf{1}_2$, $\mathbf{1}_1 \times \mathbf{1}_1$.

$\Delta(54)$ model

我々が提案した $\Delta(54)$ 模型を紹介する。

	レプトン		右巻きニュートリノ
	(L_e, L_μ, L_τ)	$(R^c_e, R^c_\mu, R^c_\tau)$	$(N^c_e, N^c_\mu, N^c_\tau)$
$\Delta(54)$	$\mathbf{3}_1^{(1)}$	$\mathbf{3}_2^{(2)}$	$\mathbf{3}_1^{(2)}$

	ヒッグス	スカラー場		
	$H_{u,d}$	χ_ℓ	χ'_ℓ	χ_N
$\Delta(54)$	$\mathbf{1}_1$	$\mathbf{1}_2$	$\mathbf{2}_1$	$\mathbf{3}_1^{(2)}$

- フレーバー対称性により特定の coupling だけが許される。

Charged lepton

- $R^c L H_u \chi_\ell/\Lambda$,

	R^c	L	χ_ℓ
$\Delta(54)$	$\mathbf{3}_2^{(2)}$	$\mathbf{3}_1^{(1)}$	$\mathbf{1}_2$

- $R^c L H_u \chi'_\ell/\Lambda$,

	R^c	L	χ'_ℓ
$\Delta(54)$	$\mathbf{3}_2^{(2)}$	$\mathbf{3}_1^{(1)}$	$\mathbf{2}_1$

$\Delta(54)$ の tensor product により coupling が決定する。
VEV を $\langle\chi_\ell\rangle = \alpha_\ell\Lambda$, $\langle\chi'_\ell\rangle = (\alpha_{\ell'_1}, \alpha_{\ell'_2})\Lambda$ とすると

$$
\begin{aligned}
M_\ell &= y_1^\ell v_d \begin{pmatrix} \alpha_\ell & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_\ell & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_\ell \end{pmatrix} \\
&+ y_2^\ell v_d \begin{pmatrix} \omega\alpha_{\ell'_1} - \alpha_{\ell'_2} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2\alpha_{\ell'_1} - \omega^2\alpha_{\ell'_2} & 0 \\ 0 & 0 & \omega\alpha_{\ell'_1} - \omega\alpha_{\ell'_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Dirac neutrino

- $N^c L H_u$,

	N^c	L
$\Delta(54)$	$\mathbf{3}_1^{(2)}$	$\mathbf{3}_1^{(1)}$

Majorana neutrino

- $\bar{N}^c N \chi_N$

	N	χ_N
S_4	$\mathbf{3}_1^{(2)}$	$\mathbf{3}_1^{(2)}$

VEV を $\langle \chi_N \rangle = (\alpha_{N_1}, \alpha_{N_2}, \alpha_{N_3})\Lambda$ とすると

$$M_D = y_D v_u \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_N = y_1 \Lambda \begin{pmatrix} \alpha_{N_1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{N_2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{N_3} \end{pmatrix} + y_2 \Lambda \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{N_3} & \alpha_{N_2} \\ \alpha_{N_3} & 0 & \alpha_{N_1} \\ \alpha_{N_2} & \alpha_{N_1} & 0 \end{pmatrix}$$

VEV の alignment を以下のように与える。

$$\langle\chi_N\rangle = (\alpha_{N_1}, \alpha_{N_2}, \alpha_{N_2})\Lambda.$$

$$M_\ell = y_1^\ell v_d \begin{pmatrix} \alpha_\ell & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_\ell & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_\ell \end{pmatrix} + y_2^\ell v_d \begin{pmatrix} \omega\alpha_{\ell_1'} - \alpha_{\ell_2'} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2(\alpha_{\ell_1'} - \alpha_{\ell_2'}) & 0 \\ 0 & 0 & \omega\alpha_{\ell_1'} - \omega\alpha_{\ell_2'} \end{pmatrix}$$

$$M_D = y_D v_u \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_N = \Lambda \begin{pmatrix} y_1\alpha_{N_1} & y_2\alpha_{N_2} & y_2\alpha_{N_2} \\ y_2\alpha_{N_2} & y_1\alpha_{N_2} & y_2\alpha_{N_1} \\ y_2\alpha_{N_2} & y_2\alpha_{N_1} & y_1\alpha_{N_2} \end{pmatrix},$$

行列の (1, 2) 成分と (1, 3) 成分, (2, 2) 成分と (3, 3) 成分が同じ、よって ν_μ と ν_τ は maximal mixing。

$y_1\alpha_{N_2} = y_2\alpha_{N_1}$ の条件を与えると

$$M_\nu = m_3 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

$$m_3 = \frac{2y_D^2 v_u^2}{\Lambda d} y_1^2 \alpha_{N_1}\alpha_{N_2}(1 - \frac{\alpha_{N_2}^3}{\alpha_{N_1}^3}),$$

$$d = (y_1^3 + 2y_2^3)\alpha_{N_1}\alpha_{N_2}\alpha_{N_2} - y_1 y_2^2(\alpha_{N_1}^3 + \alpha_{N_2}^3 + \alpha_{N_2}^3).$$

Tri-bimaximal mixing を導く質量行列と比べると

$$M_\nu = \frac{m_1 + m_3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{m_2 - m_1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{m_1 - m_3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$m_1 = m_2 = 0,\ m_3 \neq 0$ の場合に一致する。

$y_1\alpha_{N_2} = y_2\alpha_{N_1}$ の条件を少しずらすことで
ニュートリノの質量と混合を再現する。

θ_{13} の予言

θ_{13} of A_4 model

高次項を考慮するとフレーバー混合は tri-bimaximal からずれる。

ディラック $(N^c l h_u \chi_\ell/\Lambda)$ と
マヨラナ $(\bar{N}^c N \chi_\ell \chi/\Lambda^2, \quad \bar{N}^c N \chi_\ell \chi_N/\Lambda^2,)$ の高次補正を考えると

$$\delta U_\nu = \begin{pmatrix} 1 & \theta_{12}^\nu & \theta_{13}^\nu \\ -\theta_{12}^\nu & 1 & \theta_{23}^\nu \\ -\theta_{13}^\nu & -\theta_{23}^\nu & 1 \end{pmatrix}$$

$$\theta_{12}^\nu \approx \frac{4y_1^D y_1^N - 2y_0^D y_2^N + 2y_1^D y_0^N - 2y_0^D y_{34}^N + y_0^D y_{35}^N}{3\sqrt{2} y_0^N y_0^D} \alpha_\ell,$$

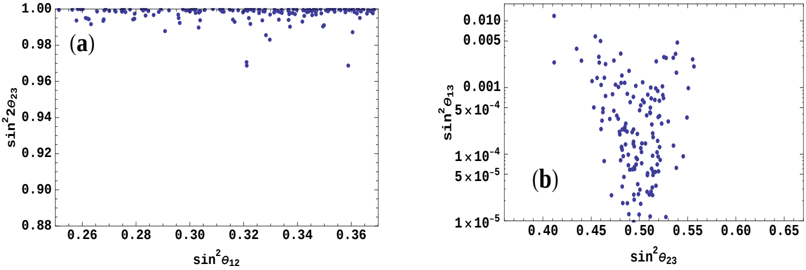
$$\theta_{13}^\nu \approx -\frac{2y_2^D y_0^N + 3y_0^D y_{32}^N - 3y_0^D y_{33}^N}{4\sqrt{3} y_0^D y_1^N} \alpha_\ell, \quad \theta_{23}^\nu \approx \frac{y_2^D y_0^N}{\sqrt{6} y_0^D (2y_1^N - y_0^N)} \alpha_\ell,$$

(荷電レプトンは diagonal のまま、よってずれは $O(\alpha_\ell)$)

Tri-bimaximal 混合からずれて $U^\dagger_{\rm MNS} = U_{\rm tri} \times \delta U_\nu$ になる。

- $\alpha_\ell = m_\tau / v_d \approx 3.2 \times 10^{-2}$
- $\Delta m_{\rm sol} / \Delta m_{\rm atm} \Rightarrow y_1^N \alpha_N \sim y_2^N \alpha$

Yukawa coupling を $O(1)$ として数値解析すると



$(0.319, 0.991)$ $(0.453, 0.014)$

プロットの中心値は $\theta_{13} \sim 0.01$ である。

θ_{13} of S_4 model

荷電レプトンの高次項:

$$(R_e, R_\mu) L H_d \chi'_u \chi'_\ell/\Lambda^2, (R_e, R_\mu) L H_d \chi_D \chi/\Lambda^2,$$
$$(R_e, R_\mu) L H_{45} \chi'_u \chi_D/\Lambda^2, \ (R_e, R_\mu) L H_{45} \chi'_\ell \chi/\Lambda^2$$
$$R_\tau L H_d \chi_u \chi_D/\Lambda^2, \ R_\tau L H_d \chi_D \chi_\ell/\Lambda^2,$$
$$R_\tau L H_{45} \chi_u \chi'_\ell/\Lambda^2, \ R_\tau L H_{45} \chi_\ell \chi'_\ell/\Lambda^2$$

$$M_\ell^\dagger M_\ell = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^2 + \epsilon_{21}^2 + \epsilon_{31}^2 & \frac{\sqrt{3} m_\mu \epsilon_{11}}{2} + \frac{\sqrt{3} m_\mu \epsilon_{21}}{2} & m_\tau \epsilon_{31} \\ \frac{\sqrt{3} m_\mu \epsilon_{11}}{2} + \frac{\sqrt{3} m_\mu \epsilon_{21}}{2} & m_\mu^2 & m_\tau \epsilon_{32} \\ m_\tau \epsilon_{31} & m_\tau \epsilon_{32} & m_\tau^2 \end{pmatrix},$$

$$\epsilon_{11} = y_{\Delta_1} \alpha_D \alpha v_d - 3 \bar{y}_{\Delta_2} \alpha'_u \alpha_D v_d, \quad \epsilon_{21} = -3 \bar{y}_{\Delta_3} \alpha'_u \alpha_D v_d, \quad \cdots$$
$$m_\mu \sim \lambda \alpha_{\ell'}, \quad m_\tau \sim \alpha_\ell,$$

$$U_E = \begin{pmatrix} 1 & O(\frac{\alpha_{\text{avg}}}{\lambda}) & O(\alpha_{\text{avg}}) \\ O(\frac{\alpha_{\text{avg}}}{\lambda}) & 1 & O(\alpha_{\text{avg}}) \\ O(\alpha_{\text{avg}}) & O(\alpha_{\text{avg}}) & 1 \end{pmatrix}$$

θ_{13} of S_4 model

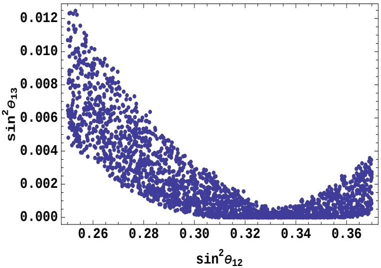
ディラック $(N_e, N_\mu) l h_u \chi_\ell \chi'_\ell \frac{\Phi}{\Lambda^3}$ と
マヨラナ $(N_e, N_\mu)(N_e, N_\mu)\chi'_u \chi$ を考えると

$$\Delta M_D = y_\Delta^D \lambda \alpha_\ell \alpha'_\ell v_u \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{e3} \approx -\frac{\sqrt{6} y_\Delta^D \alpha_\ell \alpha'_\ell}{3 y_1^D \alpha_D} \sim O(\alpha_{avg})$$

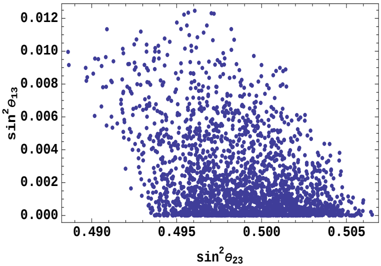
$$\Delta M_N = y_\Delta^N \alpha'_u \alpha \Lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{e3} \approx -\frac{y_\Delta^N \alpha'_u \alpha}{y_2^N \alpha_N} \sim O(\alpha_{avg})$$

Tri-bimaximal 混合からずれて $U_{\mathrm{MNS}} = U_E^\dagger \times U_{\mathrm{tri}}$ になる。

- $\alpha_\ell = m_\tau / v_d \approx 3.2 \times 10^{-2}$, $\lambda \sim 0.1$
- $\sin\theta_{13} \sim \alpha_\ell/\sqrt{2}\lambda$, $\sin\theta_{12} \sim (1 + O(\alpha_\ell/\lambda))/\sqrt{3}$,
  $\sin\theta_{23} \sim (1 - O(\alpha_\ell))/\sqrt{2}$



(0.319, 0.014)



(0.453, 0.014)

θ_{13} of $\Delta(54)$ model

$y_1\alpha_{N_2} = y_2\alpha_{N_1}$ の条件の下で

$$M_\nu = \frac{y_D^2 v_u^2}{\Lambda d} y_1^2 \alpha_{N_1}\alpha_{N_2}\left(1 - \frac{\alpha_{N_2}^3}{\alpha_{N_1}^3}\right)\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right].$$

であり、固有値は１つだけ

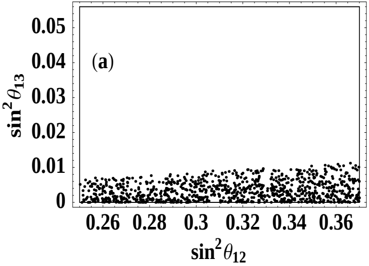
$y_1\alpha_{N_2} = y_2\alpha_{N_1}$ の条件をずらすで固有値は３つになり、
mixing も定まる。

実験と矛盾しない m_1 と m_2 を決めたとき、
mixing は tri-bimaximal から大きくずれない。

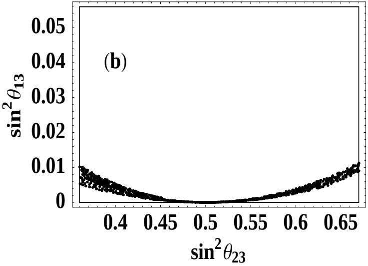
$y_1\alpha_{N_2} = y_2\alpha_{N_1}$ をずらす。

- パラメータは α_{N_1}, α_{N_2} と Yukawa coupling だけ。
- Neutrino mass の constraint が付く。

Yukawa coupling を $O(1)$ だとして数値解析すると



$(0.319, 0.014)$



$(0.453, 0.014)$

Summary

３つのフレーバー対称性の模型を考えた。

Leading では A_4, S_4, $\Delta(54)$ は
tri-bimaximal mixing を導く。

高次補正などを考えるとそれぞれ異なったずれが生じる

- A_4 : $\theta_{13} \ll 0.1$
- S_4 : $\theta_{13} \sim 0.1$ θ_{12} と相関がある。
- $\Delta(54)$: $\theta_{13} \sim 0.1$ θ_{23} と相関がある。

ニュートリノのフレーバー混合を精度良く調べることで
モデルの識別が可能

PTP の supplement (to be appeared 2010) では
もっと多くの Non-Abelian discrete symmetry
について解析している。

$$S_3,\ S_4,\ A_4,\ A_5,\ T',\ D_N,\ Q_N$$
$$\Sigma(2N^2), \Delta(3N^2),\ \Sigma(81),\ \Delta(6N^2)$$

Supplement を見れば
Non-Abelian discrete symmetry の模型がつくれる!!